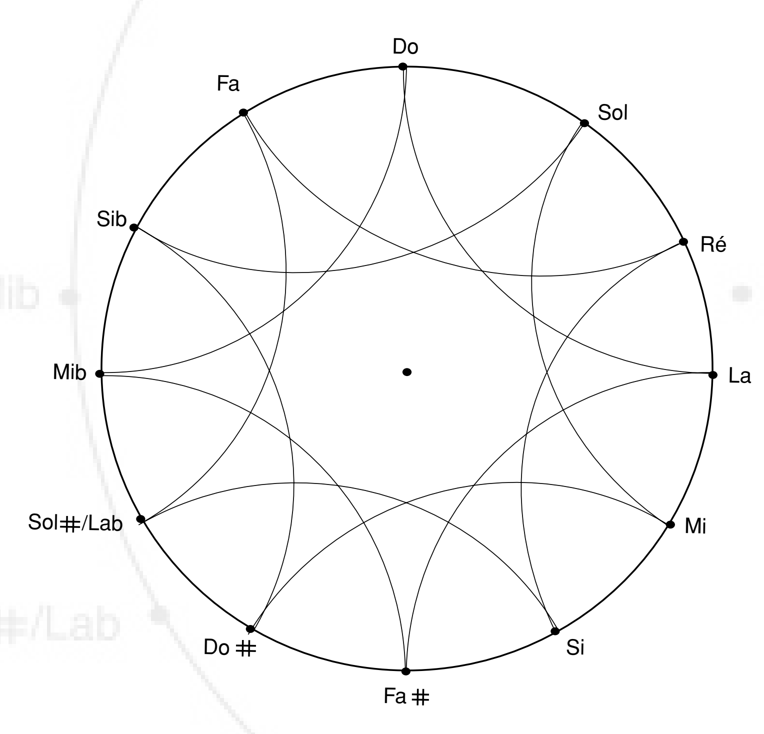
Histoire de l'Acoustique Musicale







by Éditions **FUZEAU** S.A.
B.P. 406 - COURLAY - 79306 Bressuire Cedex

Réf. 6626
ISBN : 2-84-169-152-7

Serge Donval

Professeur à la Faculté des Sciences
et au Conservatoire de Musique

Histoire de l'Acoustique Musicale

Que fait un bon physicien lorsqu'il rencontre un phénomène qui contredit son hypothèse ? Il y renonce. Que fait un systématique ? Il fonce, il tord si bien les faits que, bon gré mal gré, il les ajuste avec ses idées.

Denis Diderot (1713-1784), éditeur de l'*Encyclopédie*, ou *Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*.

À l'intérieur des citations, les accolades de la forme [ ] contiennent des précisions rajoutées par l'auteur.
Dans les tableaux des Tempéraments, les lignes représentent les rapports des différents degrés, ou les distances en cents, et les fréquences en Hertz quand c'est indiqué.

INTRODUCTION

L'objectif de cet ouvrage est de faire une étude de l'Acoustique Musicale, et de son évolution au cours de l'Histoire, depuis la Grèce Antique jusqu'au XXe siècle. L'Histoire, la Tradition et l'aspect culturel ont eu beaucoup d'influence sur la musique, souvent au détriment des règles de base de l'Acoustique; tout cela sera expliqué et argumenté.

Est-ce que vous vous-êtes déjà posés des questions comme:

- Pourquoi l'échelle musicale contient 7 degrés ?
- Pourquoi les occidentaux n'ont que 2 modes, le majeur et le mineur ?
- Pourquoi les européens n'emploient pas le quart de ton ou d'autres micro-tons connus des anciens grecs et ayant survécu jusqu'à la Renaissance dans les madrigaux du prince napolitain Gesualdo ?

Tout le monde a déjà entendu parler de la gamme (qualifiée abusivement de) tempérée du piano, où les demi-tons diatoniques et chromatiques sont égaux, en vigueur depuis un siècle et demi environ. Savez-vous que l'accordage du clavier de J.-S. Bach n'était pas identique à celui d'aujourd'hui ?

Et la Grande Question, savez-vous que toutes ces musiques, ouest-européenne, arabo-orientale, chinoise, indienne, etc. sont basées sur la même théorie du fameux "Cycle des Quintes" dont les traces remontent à la Mésopotamie ?

Les explications et les réponses à toutes ces questions seront exposées dans cet ouvrage, arguments et références à l'appui.

Les différents chapitres (à part les 4 premiers) sont organisés, en gros, selon un ordre chronologique, car la Théorie Musicale a évolué au cours de l'Histoire. Pour bien comprendre les bouleversements qui ont eu lieu au XXe siècle (chapitres XIII à XVI), il faut revenir en arrière, au moins jusqu'à la Renaissance (sinon jusqu'au Moyen Âge, ou l'Antiquité). Dans ces temps l'Eglise Catholique était très puissante, elle se mêlait de la vie quotidienne des fidèles, de la consécration des chefs d'Etat, de la science, et de la musique aussi. Peu de gens savent que le "Chant Grégorien" constitue le point de départ de la "Polyphonie" et donc de la musique baroque et classique, que la Russie et l'Eglise Orthodoxe ont conservé l'usage des anciens modes disparus du coté catholique depuis la Renaissance. Le résultat est que la musique occidentale n'a rien d'universel et présente un fort aspect, disons, culturel. Notre objectif, justement, est de faire une analyse acoustique la plus objective de la musique.

Malgré la présence de quelques formules très simples, les nombreuses références historiques rendent la lecture agréable. D'ailleurs, tout ce qu'on demande au lecteur, c'est d'avoir au moins un niveau d'instruction de Seconde Générale (chap. I § 1), beaucoup de scepticisme (je doute, donc je pense,… chap. VII) et un esprit très critique et suffisamment ouvert. Toutes les notions nécessaires à la compréhension sont expliquées (l'auteur enseigne depuis 25 ans) ; et pour les gens qui n'ont pas la moindre connaissance en Théorie Musicale, ils doivent commencer par le dernier chapitre, il leur fournira ce dont ils ont besoin.

Le présent traité s'adresse à un très large public : simples lecteurs et amateurs d'Histoire, musiciens, élèves et professeurs des Conservatoires, étudiants en musicologie et techniciens du son. Musicologues, théoriciens et praticiens y trouveront des idées et des arguments émanant d'un auteur qui dispose d'une formation à la fois physico-mathématique (Docteur d'État en Physique et Prix de thèse CNRS en 1987, section Sciences Physiques pour l'Ingénieur) et musicale (Diplômé du Conservatoire en 1993, compositeur, pianiste), et qui de surcroît peut justifier d'une culture polyvalente, le lecteur ne manquera pas de s'en rendre compte. Les Recherches pour découvrir, apprendre et rassembler le matériel nécessaire à la rédaction de cet ouvrage, comme l'indique l'auteur au chapitre XVII, ont duré un quart de siècle. Pendant la dernière décennie, la navigation sur la Toile (comme disent les canadiens) a permis d'élargir le champ d'investigation et a fourni un soutien très précieux, en particulier dans le domaine de la Micro-tonalité. En définitive, ce livre est sans aucun doute le premier en France à s'intéresser à la Micro-tonalité (actuellement très en vogue outre-atlantique). On remarquera aussi que, en plus de la centaine de références, l'auteur donne de très nombreux sites Internet qu'il a évité d'insérer dans la Bibliographie, pour respecter la Tradition.

Quant au contenu, en plus d'être clair et simple, il ne peut être plus logique. Les 4 premiers chapitres sont consacrés à l'Acoustique. Les suivants traitent du Tempérament, où des éléments historiques sont utiles pour leur compréhension, sans oublier l'épineuse question de la Consonance (chapitre VII). Un gros chapitre concerne les différents Tempéraments de plus de 12 tons, conçus pour les besoins de l'Intonation Juste. Le XXe siècle occupe une bonne partie de l'ouvrage : Atonalité, Sérialisme, Micro-tonalité, Electro-acoustique, Electronique et Informatique, plus les modes extra-européens (non-western, pour les Américains) dont les premiers signes sont apparus en Europe avec Bartok il y a environ un siècle et auxquels on prévoit un bel avenir.

Serge Donval
donval.serge@yahoo.fr

I - L'ACOUSTIQUE MUSICALE

1. INTRODUCTION

Ce premier chapitre a pour objectif d'expliquer, de la manière la plus simple, les liens entre la Musique, phénomène culturel, et l'Acoustique, discipline des Sciences Physiques consacrée à l'étude du son.

Pythagore au VIe siècle avant J.C. avait lancé les bases de l'échelle musicale, encore en vigueur de nos jours. Plus tard, Euclide rédigera son célèbre traité sur "La Division du Monocorde". Les deux sont d'illustres mathématiciens de la Grèce Antique.

Pour J.-Ph. Rameau (1683-1764), compositeur français de l'époque baroque et un des plus grands théoriciens/acousticiens de l'Histoire ([1] et Annexe I) : "La musique est une science physico-mathématique. Le son en est l'objet physique et les rapports trouvés entre les différents sons en font l'objet mathématique". Il est vrai que l'Univers obéit à des lois. Ces lois régissent tous les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc., en particulier l'Acoustique, et donc la Musique.

Depuis l'Antiquité on a établi une équivalence entre les intervalles musicaux et les rapports de longueurs (un phénomène similaire existe avec les trous d'un instrument à vent). Les positions de la quarte et de la quinte sont respectivement à 1/4 et 1/3 de la longueur à partir du sillet. A l'aide d'un quelconque instrument à cordes, et une règle graduée, on peut calculer le rapport des longueurs et donc celui des intervalles (voir schéma chap. V).

Vers la fin du XVIIe siècle on a défini la notion de fréquence (chap. II) et on a découvert la relation entre les longueurs de cordes vibrantes et les fréquences de leurs vibrations. Si une longueur l_1 donne un son de fréquence f_1, une longueur l_2 donne un son de fréquence f_2 de telle sorte que :

$$f_1 / f_2 = l_2 / l_1$$

Contrairement à l'usage chez les scientifiques, cette formule ne porte pas de nom, mais je serais tenté de l'appeler "Loi Fondamentale de l'Acoustique Musicale". Elle est parfois citée dans des livres de Physique de la classe de Seconde Générale.

Cette relation permet de déterminer ainsi les rapports des 7 notes avec la tonique, elle a servi pendant des millénaires pour l'étude de l'échelle musicale [1].

2. LES INTERVALLES

Les musiciens n'aiment pas utiliser la notion de fréquence : au lieu d'exprimer l'étendue d'un intervalle ou la distance entre 2 notes par un rapport de fréquences, ils emploient des unités comme le savart (dans la littérature francophone) mais surtout le cent (prononcer centième).

Le savart (σ, sigma, conçu par le physicien français F. Savart) : la distance en ***savart*** entre 2 fréquences f_1 et f_2 est définie par (log étant logarithme décimal, fourni par toutes les calculettes de poche)

$$I = 1000 \times \log f_2/f_1$$

ce qui donne 301 σ pour une octave, 176 σ pour une quinte, et 125 σ pour une quarte.

Le cent (défini à la fin du XIXe siècle par l'anglais Ellis) est tel que : un demi-ton tempéré (que ce soit diatonique ou chromatique) vaut 100 cents. C'est une unité simple, commode et largement adopté de nos jours : la quinte vaut 700 cents, la quarte 500, l'octave 1200, etc. Un savart vaut 4 cents environ.

L'introduction de la fonction logarithme n'est pas indispensable, on peut s'en passer et se servir uniquement du rapport de fréquences, mais il y a des habitudes qui ont la vie dure. Bien que cette fonction logarithme ne soit pas difficile à manipuler, sa présence dans des formules mathématiques peut impressionner des gens qui ne sont pas supposés avoir des connaissances scientifiques.

[1] Chez les anciens grecs, la musique était l'un des quatre piliers de la Connaissance, représentés par le Quadrivium : arithmétique, géométrie, astronomie, et musique.

3. UN PEU D'HISTOIRE

Revenons au rapport des longueurs, et sa relation avec les intervalles; il est accrédité à Pythagore, savant grec du VIe siècle avant J.C. connu surtout pour le théorème[1] de l'hypoténuse d'un triangle rectangle. En vérité, il n'est pas le premier à poser les bases de ce raisonnement, il les a apportées de Mésopotamie (voir chap. V et VI). Est-ce qu'il a fait des mesures précises ? Est-ce que sa théorie était la même que ce qu'on connaît aujourd'hui ? Est-ce que ce ne sont pas ses disciples qui ont fait le travail ? Une chose est certaine, c'est que les rapports de longueurs tels 3/2, 4/3, 5/4, 9/8 etc. n'existaient pas sous cette forme du temps de Pythagore, le système grec de numération était très compliqué (Ifrah George, ***Histoire universelle des chiffres***, Laffont, Bouquins, 1981 et 1994, Tome I, chap. 16).

Euclide, un autre mathématicien grec, plus récent !, a rédigé lui un ouvrage encore cité par les théoriciens de la musique : ***Division du Monocorde*** ou ***Division du Canon*** [2], selon les traductions. Un monocorde a servi comme modèle (ou canon) pour déterminer les rapports de longueurs et étudier l'échelle musicale.

Le Moyen Âge européen[2], c'est cette longue période qui s'étend de la fin de l'Antiquité greco-romaine jusqu'à la découverte de l'Amérique (qui a eu lieu la même année que la chute de Grenade, dernier royaume-taïfa de l'Andalousie mauresque). Il a brillé uniquement par la puissance de l'Eglise et par la construction de merveilleuses cathédrales. Dans le domaine qui nous concerne, les noms les plus marquants sont : Boèce (ou Boethius) vers l'an 500 qui a émis des idées trop controversées sur la question de la consonance (chap VII) et De Arezzo (vers l'an 1000) qui "ramena tout au diatonique et donna le coup de grâce aux quarts de tons hérités de la mélodie grecque", d'après Amédée Gastoué, ***Dictionnaire du Conservatoire*** (***Moyen Âge***, p. 559).

La Renaissance sera évoquée très souvent dans cet ouvrage, car elle représente un grand tournant dans la musique ouest-européenne, marqué par des défaillances dont les séquelles sont encore visibles de nos jours. C'est la recherche d'une échelle musicale fondée sur des critères acoustiques (§ 5), que les théoriciens de l'époque ne maîtrisaient pas, qui a entraîné la disparition des anciens modes médiévaux.

---

[1] Ce théorème était connu des babyloniens, d'après le Dictionnaire Encyclopédique ***Le Petit Larousse Illustré***, 1997.

[2] Les savants arabes ont participé au développement de l'acoustique et de la théorie musicale pendant l'âge d'or de leur civilisation (du IXe au XIIIe siècle), Alexis Chottin [3, pp 95 à 97] explique bien leur influence en Espagne et dans le Midi de la France. Ramis (chap. IX), premier des théoriciens de la Renaissance, est né et a passé presque toute sa vie en Andalousie. Plusieurs ouvrages datent de cette époque, écrits par de grands savants tels que : Al-Kindi, Al-Farabi, Avicenne, et surtout Safyouddine (voir chap. XVII), seul ce dernier étant un musicien de métier. La traduction de leurs livres est contenue dans un colossal ouvrage de 6 volumes rédigé par R. d'Erlanger [4].

Il fallait attendre le XVIIIe siècle pour que de vrais savants (physiciens et/ou mathématiciens : C. Huygens, J. Sauveur, et d'autres) apportent des idées intéressantes pour résoudre certains inconvénients inhérents à la construction de l'échelle musicale (chap. XII), mais ces idées ne seront appliquées qu'au XXe siècle (chap. XIV).

4. LA NATURE DU SON

Vers la fin du XVIIe siècle, les physiciens ont découvert la nature du son et la notion de fréquence [1] : un son est une vibration, elle peut se propager à travers la matière (l'air, l'eau, le sol, etc.). Un exemple de vibration est ce qu'on voit sur une surface d'eau lorsqu'on la perturbe par le jet d'une pierre : on observe alors des ondes qui se propagent dans toutes les directions. Le son comme toute ondulation est caractérisé par une fréquence, c'est le nombre de vibrations par seconde, celle du diapason (voir Annexe II) est de 440 (Hertz ou cycles par seconde). L'oreille humaine peut capter les fréquences entre 20 et 20 000 Hertz environ.

Le physicien français J. Sauveur (1653-1716) a découvert qu'un son est composé de plusieurs partiels [5] : un son "pur", c'est-à-dire composé d'une seule fréquence n'existe presque jamais. L'ondulation principale est toujours accompagnée par d'autres fréquences multiples qu'on appelle les harmoniques. Et c'est l'intensité relative de ces dernières qui fait que chaque instrument de musique a une sonorité différente (timbre) et un charme particulier, et que les gens n'ont pas tous la même voix.

Rameau (1683-1764) est l'un des rares parmi les grands musiciens à tremper dans la théorie. Il a été très influencé par les travaux de Sauveur et a rédigé plusieurs ouvrages où il expose ses idées sur l'Harmonie et les accords (***La Génération Harmonique*** [6] (voir Annexe I).

F. Savart (1791-1841), physicien français et passionné d'instruments de musique [7], a inventé un appareil pour mesurer la fréquence du son, le sonomètre. On a donné son nom à une unité de mesure d'intervalle.

H. von Helmholtz (1821-1894), physicien, physiologiste et musicien, a utilisé les phénomènes de résonance acoustique dans l'analyse des sons complexes. Dans son livre sur la ***Théorie physiologique de la musique*** [8], il explique l'effet des harmoniques d'un son (timbre) sur la Consonance. Mais malgré ses longs et impressionnants calculs, il retrouve des résultats déjà connus (qu'il avait peut-être l'intention de justifier).

---

[1] Le mot est prononcé pour la première fois par Pierre Cassendi (1592-1655), savant français auteur de nombreux écrits en latin. Son disciple François Bernier les traduira en français en 1674 (***Abrégé de la philosophie de Gassendi***, Ed. Anisson, Lyon, 1684, Ed. Fayard et CNRS, Paris, 1992.

5. CONSONANCE ET TEMPÉRAMENTS

A la Renaissance, sous l'influence de la Polyphonie (style de musique savante très en vogue à l'époque), on a essayé d'apporter des améliorations au Système de Pythagore, en élaborant une échelle qui tient compte de l'harmonie, c'est-à-dire de la consonance entre notes verticales.

Plusieurs modèles ont vu le jour dont celui de G. Zarlino (1517-1590) [9] : La quarte qui était utilisée au Moyen Âge, en plus de la quinte, pour accompagner (*organum*) la mélodie n'avait plus la côte mais la tierce ne formait pas un intervalle consonant (chap. VII et VIII) avec la tonique et il s'en est suivi une légère correction (chap. IX). Le Tempérament qui découle de cette idée et qui est qualifié de "juste" présente des tons non tous égaux, ce qui le rend complexe et incohérent avec la pratique musicale, il n'a pas duré longtemps. A vrai dire, il n'a jamais dépassé le stade de la théorie bien qu'il soit souvent cité dans les manuels à cause de sa simplicité. Une autre idée a vu le jour à la même époque (émise par Pietro Aaron en 1523 [10]) et allait avoir plus de succès: le but était de disposer de tons les plus égaux possibles, tout en respectant des intervalles les plus justes possibles : c'est le Tempérament Mésotonique (meantone dans la littérature anglo-saxone). Des corrections furent rajoutées par la suite, ce qui a abouti à plusieurs variantes (chap. X) qui sont restées d'usage jusqu'à fin XIXe siècle.

Bien que ses premières traces remontent à la Renaissance, le Tempérament Égal en vigueur dans les pianos actuels ne s'est imposé qu'il y a un siècle et demi environ (les orgues du Baroque avaient plus de 12 touches et les tons sur le clavecin de J. S. Bach n'étaient pas égaux). Un demi-ton chromatique (Do-Do# ou Lab-La) est exactement égal à un demi-ton diatonique (Mi-Fa ou Si-Do) et ceci est bien-entendu en contradiction avec certains éléments (comme Fa# > Solb) connus chez les violonistes.

Ce Tempérament Égal à 12 demi-tons tous égaux, avec l'Harmonie Classique dont il est le support, sera fortement mis en cause à partir des années 1900. S'il a rendu de grands services à la musique occidentale, on commence à sentir les limites qu'il lui impose car les musiciens veulent explorer de nouveaux intervalles (1/3, 1/4 et 1/5 de ton) présents dans des musiques extra-européennes (dites "ethniques") et de nouvelles échelles à plus de 12 divisions (échelles micro-tonales à 19, 31 ou 43 tons.) pour répondre aux critères de l'Intonation Juste.

6. L'ÉLECTRONIQUE

La recherche de nouvelles sonorités a été un pôle d'activité très intense depuis que les futuristes italiens ont conçu, il y a un siècle, "l'Intonation du Bruit", en voulant l'inclure dans l'Orchestre (chap. XV). Tous les musiciens novateurs s'y sont intéressés depuis la Russie (Scriabine) jusqu'en Amérique (Henry Cowell) en passant par l'Europe. Nous démontrerons au chap. III, § 4 que "bruit" et "son musical" sont tous deux de même nature, et que la distinction est uniquement d'ordre psychologique. Les novateurs voulaient explorer tout l'Univers Sonore et découvrir des sonorités autres que celles fournies par les instruments conventionnels, certains ont eu recours à des objets divers déjà existants, d'autres ont construit les leurs. Un très grand nombre de nouveaux instruments a été fabriqué pendant la 1re moitié du XXe siècle (chap. XV, § 2). Cette tendance s'est accentuée à partir des années 1950 avec le Sérialisme Intégral qui préconisait l'application des séries à tous les paramètres du son : hauteur, durée, intensité, et timbre (ou spectre sonore). Elle trouvera un support extraordinaire dans l'Electronique (Stockhausen) et l'Ordinateur (chap XVI).

II - LE SON ET LA NOTION DE FRÉQUENCE

1. LES VIBRATIONS SONORES

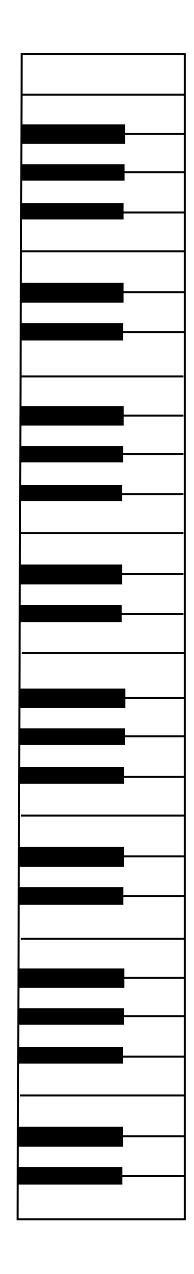
Le son est la sensation produite par les vibrations d'un milieu matériel (air de l'atmosphère par exemple) sur l'oreille. C'est une membrane (le tympan) qui reçoit ces vibrations et les transmet au cerveau pour les analyser. Un microphone fonctionne d'une manière similaire : sa membrane capte le son, son électro-aimant le transforme en signaux électriques qui sont ensuite envoyés à un dispositif d'enregistrement ou de transmission.

Cette ondulation se propage dans l'air et se présente comme une suite de compressions et de dilatations du gaz contenu dans l'air (azote, oxygène...), à la manière d'un accordéon ou d'un serpent. Le même phénomène d'onde sonore est possible dans un milieu autre que l'air: l'eau de mer (principe du sonar), le métal (les rails du chemin de fer), le mur ou la terre… (***http://users.swing.be/b_welding/tfe.htm***).

Lorsqu'on gratte une corde, les vibrations (ou ondulations) créées dans l'atmosphère sont caractérisées par :

– une amplitude (qui indique l'intensité ou la puissance) : les physiciens évaluent le niveau sonore par une unité appelée "Bel" ou "déciBel"; l'oreille humaine peut supporter des sons (ou bruits) jusqu'à 120 décibels (voir Annexe III).

– une fréquence, qui est le nombre de ces vibrations émises par seconde. On parle aussi de nombre de cycles par seconde, ou de "hertz" qui est l'unité officielle convenue par les physiciens. Plus un son est aigu et plus sa fréquence est grande, la gamme des sons audibles est comprise entre 20 et 20000 Hz (les infrasons et ultrasons ont des fréquences trop basses ou trop élevées pour être perçues par l'oreille humaine). Au delà de 4000 Hz environ, les sons deviennent trop aigus et ne sont plus agréables : la bande de fréquences qui s'étend de 20 à 4000 Hz couvre en gros les 7 octaves d'un piano standard.



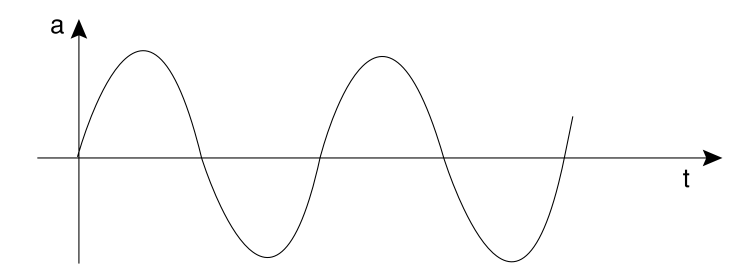
Do^5	1046,5
Si^4	987,8
La^4	880
Sol^4	784
Fa^4	698,4
Mi^4	659,2
Ré^4	587,3
Do^4	523,2
Si^3	493,9
La^3	440
Sol^3	392
Fa^3	349,2
Mi^3	329,6
Ré^3	293,7
Do^3	261,6
Si^2	246,9
La^2	220
Sol^2	196,0
Fa^2	174,6
Mi^2	164,8
Ré^2	146,8
Do^2	130,8
Si^1	123,5
La^1	110,0
Sol^1	98,0
Fa^1	87,3
Mi^1	82,4
Ré^1	73,4
Do^1	65,4

Les quatre octaves du milieu du piano avec les fréquences en Hertz (pour les détails, voir chap. XI)

– le timbre, qui est lié à la complexité de la forme de la vibration[1] : un son pur a une forme sinusoïdale (voir plus loin), il n'est pas agréable à entendre et ressemble plutôt à un sifflement (ou à une sirène). Un son réel est composé d'un fondamental et d'une série de sons secondaires appelés harmoniques ou partiels (chap. III) avec des intensités plus ou moins faibles, c'est ce qui différencie les instruments et les voix.

2. FORME SINUSOIDALE

La fonction sinus en mathématiques est représentée par la courbe suivante :



L'ordonnée (axe vertical) indique la fonction sinus “a”, et l'abscisse (axe horizontal) le temps “t”.

Si vous jetez une pierre sur une surface d'eau calme, une ondulation va se propager dans toutes les directions à partir du point d'impact, et si vous regardez le long d'un rayon à un instant donnée (imaginez que vous prenez une photo de l'ensemble) vous allez voir exactement une forme sinusoïdale. Par ailleurs, si vous regardez un point fixe, matérialisé par la présence d'un objet flottant, ce point monte et descend, sa position varie dans le temps en décrivant encore une forme sinusoïdale.

Il est vrai qu'une vibration sonore dépend à la fois de l'espace et du temps mais, pour simplifier, gardons uniquement le paramètre “temps”; l'amplitude de la vibration sonore sera alors exprimée en fonction du temps “t” par :

$$a \quad = \quad A \; \sin\,(f \times t)$$

[1] La vitesse d'une vibration acoustique dépend du milieu de propagation. Dans l'air, et dans les conditions normales de température (20°) et de pression (1 bar ou 10^5 Pa), elle est d'environ 333 m/s ou 1200 km/h (nombre de Mach) ; elle est de 1500 m/s dans l'eau et de 5000 m/s dans l'acier. Mais le paramètre “vitesse” n'intervient pas dans le domaine musical.

A est l'amplitude maximale, elle indique la puissance ou l'intensité (magnitude), et f [1] est la fréquence (§ 3).

3. FRÉQUENCE ET LONGUEUR DE CORDE

Revenons une dernière fois sur la propagation des ondes à la surface de l'eau : Si vous fixez des yeux un objet flottant, chaque fois qu'une onde arrive, il va monter et descendre en décrivant une forme comme celle de § 2, pour revenir à son point de départ et recommencer ensuite un nouveau cycle. Essayez de compter le nombre de cycles par seconde: s'il y en a 10 en 5 secondes, la fréquence de cette onde est alors de :

$$f = 10 / 5 = 2 \text{ cycles par seconde ou } 2 \text{ Hertz}$$

La durée d'une vibration est de 5/10= 0,5 seconde, c'est ce qu'on appelle la période T de l'onde :

$$T = 1 / f$$

C'est exactement la même définition quand il s'agit des ondes sonores: quand on dit qu'un son est de 100 Hz, cela signifie que les ondulations successives provoquées par la corde qu'on a grattée ont percuté le tympan de l'oreille 100 fois toutes les secondes : f = 100 Hz et T = 1/100 = 0,01 s.

Un signal ou un événement quelconque est dit périodique s'il se répète, à l'identique, régulièrement après chaque intervalle de temps invariable T qu'on appelle période. On parle aussi d'événement cyclique. On peut trouver facilement un grand nombre d'exemples dans la nature et dans la vie quotidienne.

Longueur de corde

Un musicien qui joue sur un instrument à cordes place ses doigts à différentes positions pour changer la longueur vibrante et produire différentes notes. La même constatation vaut pour un piano (dont les cordes diffèrent par leurs longueurs) mais aussi pour tout instrument à vent (à cause de la distance des trous). En effet, depuis

[1] L'expression de “a” est légèrement simplifiée, sa vraie forme est $a=A\sin(2\pi ft)$.

l'Antiquité on a établi une équivalence entre les intervalles musicaux et les rapports de longueurs. Si une longueur l_1 donne un son de fréquence f_1, une longueur l_2 donne un son de fréquence f_2 de telle sorte que :

$$f_1 / f_2 \quad = \quad l_2 / l_1$$

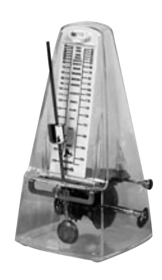
Prenons un exemple. Imaginons qu'on a entre les mains un instrument dont la longueur de corde est de 60 cm. A vide elle donne une note qu'on peut accorder sur Do3, de fréquence f = 261,6 Hz. Si on appuie sur le milieu, c'est-à-dire 30 cm, c'est l'octave de fréquence 2×261,6 = 523,2 Hz qu'on entend (longueur moitié donc fréquence double). Si on pose le doigt à 20 cm du sillet, soit une longueur grattée de 40 cm, ce sera la note Sol. 15 cm du sillet correspond à une longueur grattée de 45 cm et ce sera la note Fa, et ainsi de suite.

Cette relation a toujours été un moyen pour l'étude de l'échelle musicale. Ceci s'explique par le fait que les instruments à cordes sont les plus courants et que la mesure de longueur est relativement aisée. Mais des théoriciens continuent toujours à se référer à la longueur de corde, alors que les instruments électroniques (pianos, orgues, synthétiseurs, et aussi cartes son dans les ordinateurs) ont fait leur apparition depuis environ un demi-siècle. Ce n'est donc pas une longueur qui est commune à ces instruments à cordes, électroniques, à vent ou autres, mais c'est bien une fréquence. D'ailleurs la hauteur du diapason (La3) est définie par sa fréquence de 440 Hz (Annexe II).



Le Métronome

Quand on écrit au début d'une partition ♪ = 100 (ou 120), cela signifie qu'il y a 100 (ou 120) croches par minute. La durée d'une croche est alors 1 mn / 100 = 60 s / 100 = 0,6 s (ou 1 mn/120 = 0,5 s). Il s'agit donc bel et bien d'une fréquence, nombre d'événements périodiques par unité de temps.



4. LA CONSONANCE

Si un ensemble d'instruments, bien accordés entre eux, joue la même note (à l'unisson), le son résultant sera agréable à l'oreille, c'est ce qu'on appelle consonance (la dissonance désigne l'effet inverse).

D'une manière générale, deux sons sont consonants (ou forment un intervalle juste) s'ils provoquent une sensation d'harmonie, de repos et de détente [1]; une mélodie se termine toujours par une consonance (pensez à un accord parfait).

Il n'existe pas de formule mathématique pour exprimer cela, mais on a toujours réussi à repérer certains degrés consonants.

L'octave est une consonance, presque aussi parfaite que l'unisson. D'autres consonances existent, c'est le cas de la quinte.

L'unisson ne présente pas d'intérêt théorique. La sensation réalisée par l'octave est due au fait que sa fréquence est exactement le double de celle de la tonique. Le son résultant a toujours comme fréquence principale celle de la tonique, l'octave rajoute ce qu'on appelle un son harmonique et modifie le timbre (chap. III).

La quinte produit un effet semblable mais à un moindre degré, du fait que sa fréquence est triple de celle de la tonique (voir détails au chapitre suivant).

Les musiciens, et surtout les théoriciens, traitent la notion de consonance en se référant aux intervalles pour exprimer la même idée, on parle alors d'intervalles justes : L'octave et la quinte sont les intervalles les plus justes, vient ensuite la quarte bien qu'elle soit très controversée, certains lui préfèrent la tierce, etc.

Si l'octave et la quinte sont d'authentiques intervalles justes ou consonants, d'autres sont carrément dissonants (la 7e majeure, la 5te diminuée, etc.). La limite entre les deux catégories est floue. Cela reste une notion relative et tout à fait subjective : un intervalle peut être considéré consonant ou dissonant selon le goût, le style ou l'époque. C'est là l'origine de la notion d'accord et de son évolution dans le temps et selon le type de musique.

[1] On dit parfois qu'ils sont confondus lorsqu'ils sont exécutés simultanément, c'est-à-dire qu'ils donnent l'impression d'un son unique.

5. LES BATTEMENTS

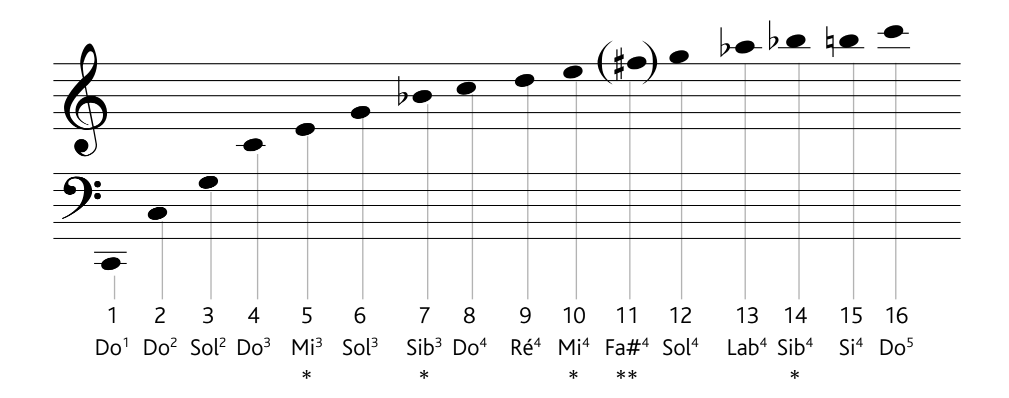
La courbe §2 est “l’image” d’un son pur (diapason, sirène,…) au sens physique. Un son quelconque (ou un bruit) a une courbe plus ou moins similaire mais plus déformée (chap. III, § 1).

Un intervalle de 2 notes, Do et Sol par exemple, donne un son résultant de courbe (image) assez régulière (jolie), de fréquence principale celle de Do, car c’est un intervalle juste. Si ce n’est pas le cas, le son résultant serait très complexe, et son image serait plus brouillée ; c’est le cas d’un triton ou d’une 7e majeure.

Dans le cas de 2 sons (purs) de fréquences très proches (moins de 10 % d’écart, c’est-à-dire telles que $f < f' < 1{,}1 \times f$), c’est une sensation particulière : le son résultant a une fréquence très proche de f et de f’ mais on entend aussi quelque-chose qui ressemble à un son grave d’amplitude variable (il présente des hauts et des bas). C’est ce que les musiciens appellent “battements”. C’est une expérience facile à réaliser à l’aide de 2 instruments pas très bien accordés (on s’en sert d’ailleurs pour les accorder), ou entre 2 notes très voisines (essayez avec Do et Do# d’un clavier). C’est un phénomène connu depuis la Renaissance, il a eu des répercussions sur l’étude de l’échelle musicale (chap. VII, VIII et suivants).

Les physiciens désignent ce son grave résultant par le terme “Différentiel”, car certains auteurs pensent que sa fréquence est la différence entre f’ et f, ce qui n’est pas tout à fait vrai. Ce qui est vrai, c’est que plus les fréquences f et f’ s’approchent, plus celle des battements est faible jusqu’à être imperceptible par l’oreille (l’oreille humaine ne perçoit pas des sons en dessous d’une vingtaine de Hz), et les 2 sons sont alors bien accordés. Ce phénomène peut être mis en évidence par la théorie et à l’aide de formules mathématiques (voir Annexe IV).

On a longtemps débattu sur la nature du “Différentiel” : si Helmholtz est convaincu qu’il s’agit d’un son réel, Rameau le voit comme une simple illusion acoustique et il a raison. L’examen de la courbe sonore (Annexe IV) montre bien que le résultat est un son unique, et c’est uniquement le fait que son amplitude (intensité) varie d’une manière régulière qui donne cette sensation.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Do1	Do2	Sol2	Do3	Mi3 *	Sol3	Sib3 *	Do4	Ré4	Mi4 *	Fa#4 **	Sol4	Lab4	Sib4 *	Si4	Do5

Les Harmoniques de Do1

* rigoureusement vrai dans les Tempéraments Justes, mais trop approximatif dans le Tempérament Égal ou Pythagoricien

** plus précisément c'est un son intermédiaire entre Fa4 et Fa#4 mais qui ne figure sur aucune échelle musicale. (Fa ≠ dans la Musique Spectrale des années 1970, ce dernier signe indiquant un demi-dièse, voir chapitre XIX sur les Accords).

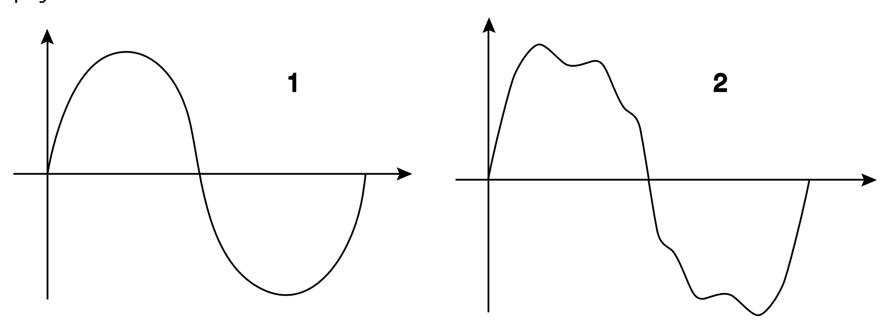
III - LES HARMONIQUES

1. LE TIMBRE

La courbe d'un son pur a une forme parfaitement sinusoïdale (fig. 1). Mais un tel son est un peu sec, froid, sans être forcément désagréable; c'est un sifflement, comme le son du diapason. Un son musical d'un instrument quelconque (ou un chant) a une forme plus complexe, plus élaborée (fig. 2), et c'est ce qui caractérise son timbre.

Le timbre est la sensation auditive qui permet de distinguer des sons produits (à la même fréquence) par différents instruments, par exemple un piano et un violon.

Un son musical contient plusieurs composantes, des sons secondaires émis simultanément, d'intensités plus faibles, et de fréquences multiples du son principal : ce sont ses harmoniques ou partiels. En d'autres termes, si un instrument de musique émet une note de fréquence 100 Hz, on entendra aussi des sons secondaires plus faibles de fréquences 200, 300, 400, 500, 600, etc. C'est son spectre, disent les physiciens.



Théorème de Fourier (1768-1830) : tout signal (sonore, électrique, etc.) de forme régulière, s'il est périodique (II. 3), peut être décomposé, d'une manière unique, en un nombre de vibrations pendulaires (sinusoïdales) dont les fréquences sont multiples de celle du signal.

Appliqué à une corde vibrante, cela signifie que le son qu'elle donne est la combinaison de plusieurs harmoniques (sons purs) dont on peut évaluer les amplitudes à l'aide de formules établies par Fourier.

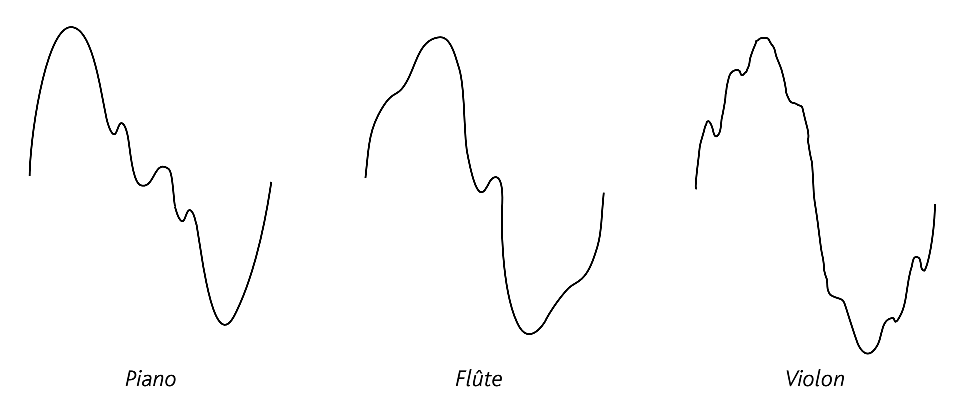
2. LES HARMONIQUES

Avec la note Do1, si on maintient appuyée la touche du piano, on peut entendre une suite (théoriquement infinie) de notes de fréquences multiples de celle de Do1 : c'est la résonance naturelle du corps sonore. Ce phénomène est connu des physiciens depuis le XVIIe siècle et est une application directe du théorème de Fourier.

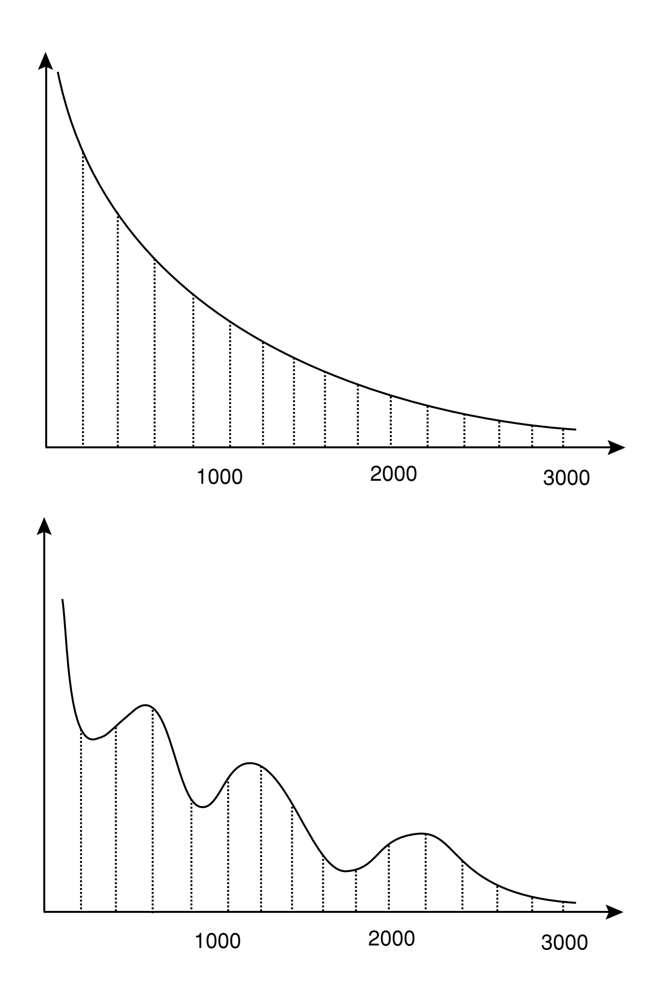
On trouve cette série d'harmoniques dans divers ouvrages de théorie musicale tels que Chailley J. et Challan H. [11] et A. Danhauser [12] qui présentent les harmoniques de Do1, jusqu'à Do5, c'est-à-dire sur une étendue de 4 octaves (voir schéma). Et pour ceux qui ont l'esprit scientifique, le livre de Leipp [13] contient des éléments intéressants qui vont au-delà de l'objet de ce paragraphe.

Remarque :

Ce schéma donne les harmoniques sous forme de notes de musique alors qu'on ne les a pas encore (bien) définies, d'autant plus qu'elles varient (très) légèrement en fonction de chaque Système (ou Tempérament, voir chapitres V, VI, VIII et les suivants), mais il faut reconnaître aussi que c'est la meilleure manière de présenter les harmoniques à des musiciens qui ne sont pas supposés avoir des connaissances en Acoustique.

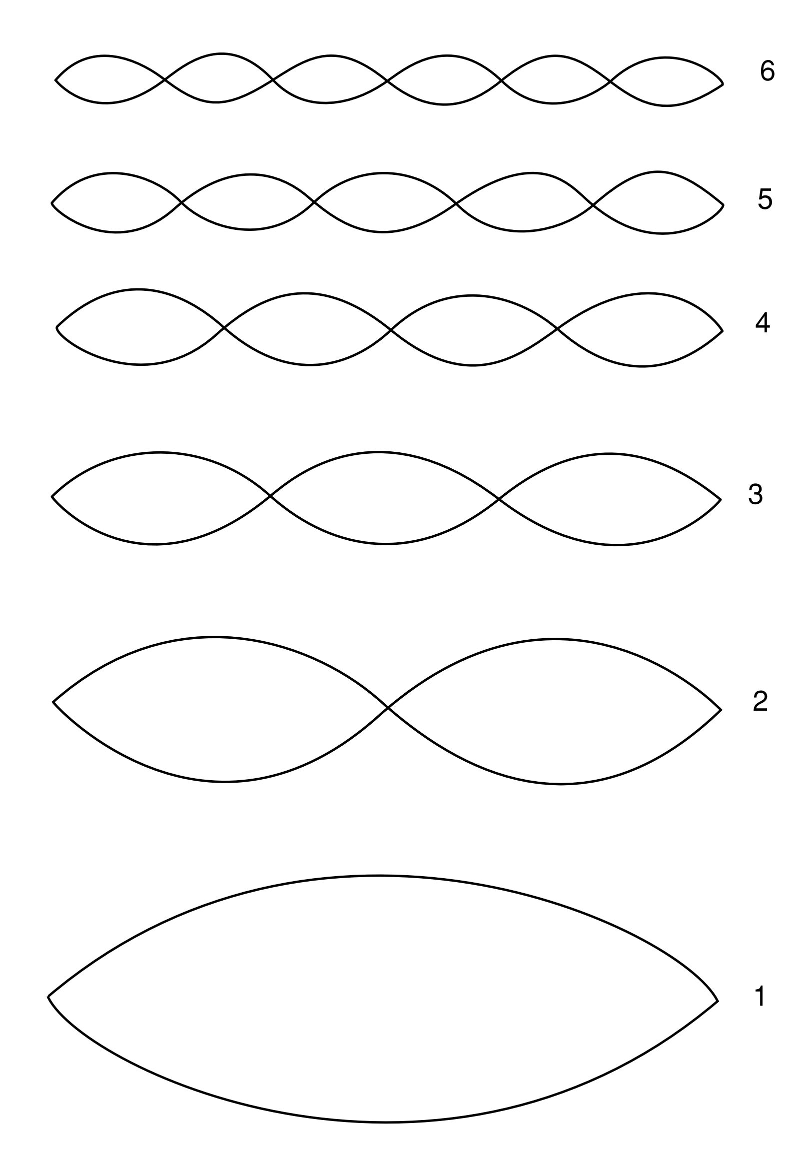


Timbre (ou spectre) du son de divers instruments.



En haut : spectre sonore (pris parfois comme) standard [14]

En bas : spectre réel avec les harmoniques regroupés autour des "formants" (chap. III § 3)



Une corde grattée vibre et donne un son complexe composé d'un fondamental et de plusieurs harmoniques (partiels).

Le schéma montre quelques harmoniques de premier ordre : 2f, 3f, 4f, 5f, 6f (voir § 2).

Avec la note Do1, en supposant pour simplifier que sa fréquence est f = 100, on entendra aussi les fréquences :

f = 100	(Do1)
2×f = 200	(Do2)
3×f = 300	(Sol2)
4×f = 400	(Do3)
5×f = 500	(Mi3*)
6×f = 600	(Sol3)
7×f = 700	(Sib3*)
8×f = 800	(Do4)
9×f = 900	(Ré4)
10×f =1000	(Mi4*)
11×f =1100	(Fa#4**)
etc.	

* rigoureusement vrai dans les Tempéraments Justes (chap IX), mais trop approximatif dans les Tempéraments Égal et Pythagoricien,

** plus précisément c'est un son intermédiaire entre Fa4 et Fa#4 mais qui ne figure sur aucune échelle musicale, nous le désignerons ultérieurement par **la note X** (Fa≠ dans la Musique Spectrale des années 1970, ce dernier signe indiquant un demi-dièse, voir chapitre sur les Accords).

On appelle ces fréquences des harmoniques ou sons partiels :
– f est le fondamental ou harmonique n° 1,
– 2×f est l'harmonique n° 2
– 3×f est l'harmonique n° 3, etc.

Les différents harmoniques ont donc, avec le fondamental, des rapports de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc.[1]. Pour des raisons faciles à admettre, les théoriciens de la musique préfèrent travailler à l'intérieur d'une et même octave, ce qui revient à diviser chaque fréquence harmonique plusieurs fois par 2 jusqu'à obtenir une valeur comprise entre f et 2f (entre 100 et 200 dans l'exemple précédent) ou un rapport de fréquences entre 1 et 2 : Sol est désigné par la fraction 3/2, Mi naturel par 5/4, Si b par 7/4, Ré par 9/8. Pour le 11e rang, voir chap. XIX § 5).

[1] Si on s'éloigne encore, les sons seront de plus en plus serrés. Entre les numéros 80 et 81 il y a un rapport de 81/80 ; c'est le comma, qu'on peut considérer (provisoirement) comme l'écart entre un demi-ton diatonique et un demi-ton chromatique sur les instruments à cordes.

3. LES FORMANTS

On vient de voir qu'un son réel (naturel, artificiel, phonème, etc.) est formé d'un son fondamental et d'un spectre de partiels de fréquences harmoniques (multiples). Les amplitudes de ces derniers sont certes plus faibles, mais leurs valeurs relatives dépendent de chaque instrument[1].

On a souvent pris comme modèle théorique (standard) un spectre dont les amplitudes décroissent régulièrement [14] mais cela n'est pas conforme à la réalité. Le spectre des partiels présente en effet une ou plusieurs bandes, appelées parfois fréquences dominantes ou formants, et exploitées dans la Musique Spectrale des années 1970.

Le sonagramme est le nom de l'appareil destiné à analyser le spectre d'un son. Les premiers sont apparus dans les années 60. Actuellement, avec les progrès réalisés en Électronique et en Informatique, cette analyse peut être effectuée par un simple ordinateur PC et un microphone, à l'aide de logiciels de type AudioSculpt développé par l'IRCAM (chercher sonagram sur le Web).

4. SON ET BRUIT

On reviendra avec plus de détail sur d'autres aspects du bruit (chap. XV) et son exploitation par les musiciens contemporains.

Considérons un signal émis par un corps sonore (à vent, à cordes, etc.), s'il est court il peut durer à peine quelques fractions de seconde. Prenons un exemple concret, soit une corde accordée en La (440 Hz) et dont la vibration dure un dixième de seconde. Une seule vibration de "La" dure :

$$T = 1 / f = 1 / 440 = 2{,}273 \text{ ms} = 2{,}273 \ 10^{-3} \text{ s} \approx 2{,}3 \text{ ms} \quad (\text{ms} = \text{milliseconde})$$

En une seconde, il y a

$$f = 1 / T = 1 / 2{,}273 \ 10^{-3} \text{ s} = 440 \text{ vibrations}$$

[1] Pour des raisons de simplicité, un son est toujours représenté dans ce chapitre par une seule sinusoïde. En réalité le moindre signal sonore (bruit, consonne, voyelle,...) contient plusieurs dizaines de sinusoïdes (§ 4). Le début, de durée très courte, porte le nom de "régime transitoire", suit un palier où l'amplitude est constante, enfin une phase finale où l'amplitude décroît, le tout durant une fraction de seconde.

ou 44 vibrations en un dixième de seconde. Conclusion : le moindre signal sonore envoie plusieurs dizaines d'ondes.

Ce qu'on appelle "bruit", c'est une suite de sons désordonnés, créés par un appareil qui n'est pas, a priori, destiné à créer des sons, donc c'est quelque chose dont la nature (intrinsèque) est indésirable. Mais si on prend un seul des signaux composant ce bruit, et qui dure un dixième de seconde, rien ne le distingue d'un signal créé par un piano ou un violon à part la différence de timbre[1]. La distinction est uniquement d'ordre psychologique.

Un bruit et un son musical sont composés de signaux de même nature, sauf que dans un cas ces signaux sont ordonnés selon l'idée du compositeur ou de l'interprète et exécutés sur un instrument prévu pour cela, alors que dans l'autre cas ils sont désordonnés et incohérents, et surtout créés par des appareils (ou machines) qui d'habitude ne figurent pas dans l'orchestre. Le plus drôle, c'est que vous pouvez faire du bruit avec un piano : il suffit de taper des notes disparates, incohérentes, sans aucun lien, avec une forte intensité, et vous verrez la réaction de votre entourage.

5. INHARMONIQUES ET SONS DE CLOCHES

Jusqu'ici on a eu comme support matériel de notre raisonnement des instruments à cordes. La relation $f_1 / f_2 = l_2 / l_1$ est valable aussi pour des instruments à vent, dans ce cas l (l_1, l_2 , etc.) désigne la longueur du tube d'air qui vibre entre l'embouchure et les différents trous. Les sons partiels (ou harmoniques) correspondent alors à des longueurs $l/2$, $l/3$, $l/4$, $l/5$, etc. La cloche, parmi quelques rares objets, est parfois considérée comme un instrument de musique bien que son premier rôle était de faire du bruit, pour annoncer des cérémonies ou appeler des fidèles par exemple[2]. Mais tout le monde s'accorde à dire que le son de cloche est désagréable (grinçant). Et pour cause, les sons partiels qu'il génère sont des inharmoniques, leurs fréquences ne sont pas multiples de la fréquence fondamentale. L'explication est évidente: la forme de la cloche n'a rien d'assimilable à une longueur qu'on puisse diviser pour générer des harmoniques.

---

1 Le musicien novateur Edgar Varèse (chap. XV § 5) était le premier à refuser de distinguer entre le bruit et le son. A propos du livre de son maître F. Busoni (Esquisse d'une nouvelle esthétique musicale) il parlait de "la bombe qui ferait exploser le monde musical et y laisserait entrer tous les sons par la brèche, sons qu'à l'époque on appelait bruits."

2 Un autre rôle lui est assigné chez les fermiers de la montagne suisse, inutile de le préciser ici.

Depuis un demi-siècle environ on peut créer des sons avec des inharmoniques à l'aide d'appareils électroniques, chacun a le droit d'apprécier ou pas ; mais ce n'est pas crédible d'aller jusqu'à faire des études sur la Consonance (chap. VII) en prenant des spectres inharmoniques [14].



La cloche, un des rares "instruments" qui créent des sons à partiels non harmoniques (III, § 5).

IV - MESURE D'INTERVALLE

1. L'ÉCHELLE DES FRÉQUENCES

A partir de 2 notes à un ton de distance, comment définir donc évaluer la note du milieu (à mi-hauteur ou à mi-distance), c'est-à-dire la note qui se trouve à un demi-ton plus haut (plus aigu) que la 1re ou à un demi-ton plus bas (plus grave) que la seconde.

Prenons un exemple concret : Fa-Sol. Sol a un rapport de 3/2 (chap. III § 2), et son renversement Fa a un rapport de 4/3 (chap. V § 4) ; leur distance est :

$$3/2 \div 4/3 = 9/8 = 1{,}125$$

Cela signifie que le rapport des fréquences (ou des longueurs de cordes) est de 1,125. Quelle est alors la fréquence de la note du milieu ? Ce n'est pas du tout la moyenne arithmétique

$$(f + f') / 2 = (f + 1{,}125\, f) / 2 = 1{,}0625 \times f$$

mais on verra plus loin que c'est $1{,}0607 \times f$. La différence est certes très faible dans ce cas particulier, mais c'est surtout la manière de l'évaluer qui compte car elle est inhérente à la définition même du système de mesure et de graduation.

Cet exemple est très significatif. Les rapports de la quarte, la quinte et l'octave sont, dans l'ordre 4/3, 3/2 et 2, en plus (Do-Fa) + (Fa-Do) nous amène à l'octave :

$$4^{te} + 5^{te} = 8^{ve}$$

La relation entre les 3 rapports est

$$3/2 \times 4/3 = 12/6 = 2$$

On n'additionne pas 3/2 et 4/3 pour obtenir 2, on les multiplie Et cette explication vaut pour tous les exemples à venir. La graduation de l'échelle des fréquences doit donc se faire d'une manière multiplicative (et non pas additive).

Là où les grandeurs doivent s'ajouter, on dit que la graduation est linéaire (surface, volume, poids, salaire, énergie, etc.). L'échelle musicale, elle, est multiplicative (ou logarithmique (§ 3).

2. MOYENNE GÉOMÉTRIQUE

En conséquence, pour trouver le milieu d'un intervalle entre 2 fréquences f et f', on doit prendre leur moyenne géométrique (les scientifiques l'appellent ainsi) c'est-à-dire la racine carrée du produit $f \times f'$ et non pas leur moyenne arithmétique $(f+f')/2$.

Reprenons l'exemple précédent, le milieu de Fa et Sol devrait avoir avec la tonique le rapport suivant :

$$\sqrt{f \times f'} = \sqrt{4/3 \times 3/2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

C'est ce qu'on pourrait désigner par Fa# ou Solb, sur le clavier puisque ces 2 sons ne sont pas identiques (enharmoniques) sur les instruments à cordes.

Un exemple de 2 notes séparées par 2 tons ou tierce majeure, Fa (4/3) et La (27/16) (chap. V), essayons de trouver leur milieu. La moyenne arithmétique donne $(f+f')/2 = 1{,}5104$ alors que Sol est de

$$\sqrt{f \times f'} = (27/16 \times 4/3)^{1/2} = 1{,}5000$$

Les hauteurs de ces 3 notes (Fa, Sol, La) séparées par un ton sont dans une progression géométrique (selon le langage mathématique) :

$$f(La) / f(Sol) = f(Sol) / f(Fa) = 1{,}1225$$

et c'est valable pour toutes les notes séparées par un ton (voir Tableau chap. II).

Les demi-tons ont une valeur de racine (1,1225) = $\sqrt{1{,}1225} \approx 1{,}0595$:

$$f(Fa\#) / f(Fa) = f(Fa) / f(Mi) = f(Mi) / f(Mib) = f(Mib) / f(Ré) \approx 1{,}0595$$

Pour plus de détails (et en particulier pour le choix de 1,1225 au lieu de 1,125), se référer au chap. XI.

3. LA FONCTION LOGARITHME

Tout le monde, physiciens compris, est habitué à des échelles linéaires : c'est plus commode de lire des grandeurs qui s'ajoutent plutôt que des grandeurs qui se multiplient. Dans ce dernier cas, les mathématiciens emploient la fonction logarithme pour remédier à cet inconvénient. Cette fonction du nom d'un savant arabe "Alkhouarizmi" du X[e] siècle (dont l'ouvrage a été traduit en latin au XII[e] siècle) a pour principale caractéristique :

$$\log (a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

Ce qui permet de présenter la fréquence sur une graduation linéaire, plus facile à saisir. C'est cette astuce qui est à la base des règles à calculer qu'on utilisait jusqu'au début des années 70 : en multipliant 2 nombres a et b, la règle, graduée en log, fait la somme de $x=\log(a)$ et $y=\log(b)$ et affiche donc

$$x + y = \log(a) + \log(b) = \log (a \times b)$$

et l'utilisateur lit sur la graduation directement le produit $a \times b$, le mot log n'est jamais affiché ou prononcé.

Exemple de la quinte et de la quarte :

Fa : $\log (4/3) = 0{,}124939$

Sol : $\log (3/2) = 0{,}176091$

donc $0{,}124939 + 0{,}176091 = 0{,}30103$ qui est tout simplement log(2), et 2 désigne l'octave.

On trouve cette fonction aussi dans la notion de décibel pour évaluer la puissance sonore (Annexe III) : le bel (10 fois décibel) est une graduation logarithmique de la puissance sonore "p" : log (p). L'oreille humaine peut supporter des sons ou des bruits jusqu'à une centaine de décibels (une dizaine de bels).

Remarque : il s'agit dans ce paragraphe du logarithme décimal (voir Annexe V).

4. UNITÉ D'INTERVALLE

D'après la définition établie par les physiciens (§ 1-2), la "taille" d'un intervalle est évaluée par le rapport des 2 fréquences. Pour diverses raisons, les théoriciens de la musique emploient plutôt le cent[1] (prononcer centième) qui est une grandeur linéaire et commode certes, mais la fréquence ne doit pas être omise ou reléguée au second plan.

Le cent est défini comme le centième d'un demi-ton "tempéré" (égal, plus exactement) de rapport 1,0595 (§ 2). Un demi-ton vaut 100 cents, un ton 200 et une octave 1200. Pour élever une fréquence d'un cent il faut donc la multiplier par

$$x = \sqrt[100]{1{,}0595} = 1{,}0595^{1/100} \approx 1{,}0005778$$

ou racine centième de 1,0595, c'est-à-dire le nombre x tel que, multiplié 100 fois par lui-même, il donne 1,0595 :

$$x^{100} = 1{,}0595 \quad \text{(Programme de Classe de Seconde).}$$

De cette définition on peut déduire l'expression mathématique de l'étendue (ou la taille) de l'intervalle entre 2 fréquences, en cents (voir Annexe V) :

$$I = 1200 \times \log_2(f_2/f_1) = 1200 \times [\log_{10}(f_2/f_1)/\log_{10}2]$$

Log_2 est le logarithme à base 2, $\log_{10}$ est le logarithme à base 10; ce dernier est le seul donné directement par les calculettes bas de gamme.

Cette définition du cent a été formulée par Ellis à la fin du XIXe siècle, spécialement pour le Tempérament Égal (chap. XI) à une époque où il venait d'éliminer tous les autres. Elle est assez significative puisqu'elle montre bien une analogie entre 1200 (lire douze cents au lieu de mille deux cents) et les 12 demi-tons du clavier. Un détail me gêne un peu puisqu'il serait plus logique d'avoir un ton de 100 cents, ½ ton de 50 cents et ¼ de ton de 25 cents, mais l'Histoire en a décidé autrement.

Remarque :

On a parlé jusqu'à présent du ton, 6e division de l'octave, mais la notion de ton a une définition plus générale et peut désigner n'importe quelle division de l'octave. Cette mise au point est prématurée et un peu dangereuse à ce stade, mais il est préférable de la signaler.

---

1 Chez les anglo-saxons, "cent" signifie centième (partie).

Le savart (σ) : Les physiciens ont utilisé par le passé cette unité. L'étendue en savarts d'un intervalle entre 2 fréquences f_1 et f_2 est définie par

$$I \quad = \quad 1000 \times \log_{10} f_2/f_1$$

ce qui donne 301σ pour une octave, 176,1σ pour une quinte, et 124,9σ pour une quarte.

Pourquoi le facteur 1000 figure-t-il dans la définition du savart ? C'est sans doute pour ne pas manipuler des chiffres très faibles : pour la quinte $\log_{10} f_2/f_1 = 0{,}1761$ alors que $1000 \times \log_{10} f_2/f_1 = 176{,}1$.

5. MOYENNE HARMONIQUE

Les théoriciens ont introduit cette notion pour justifier l'emploi de certaines fractions (voir chap. VII) bien que son intérêt en Acoustique est fort discutable. La moyenne harmonique de 2 valeurs x et y est (voir Annexe VI) :

$$2 \times xy \,/\, (x+y)$$

Les 3 nombres x, 2xy/(x+y) et y forment une progression dite harmonique. Cette définition a été élaborée uniquement pour retrouver des fractions comme 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, … chères à d'anciens théoriciens. Voici quelques exemples :

x	y	Moyenne Arithmétique	Moyenne harmonique
1 tonique	2 octave	3/2 quinte	4/3 quarte
1 tonique	3/2 quinte	5/4 3ce naturelle	6/5 3ce mineure

Mais ils se sont arrêtés là ; ni 7/6 ni 8/7, ni le fameux rapport 9/8 ne peuvent être exprimés (voir Annexe VI) sous la forme d'une moyenne harmonique. Nous verrons plus loin que c'est la tierce juste 5/4, et non la tierce mineure, qui forme un (vrai) accord parfait avec la tonique et la quinte.

6. D'AUTRES UNITÉS

Par le passé, les mathématiciens et les physiciens ont élaboré plusieurs échelles pour graduer les notes de musique à l'intérieur d'une octave. A part le cent qui est adopté par tout le monde et le savart qu'on voit encore dans des ouvrages français, les autres n'ont qu'un intérêt historique. En voici quelques exemples, dont la compréhension doit souvent attendre la lecture des chapitres ultérieurs :

- Le dièse a déjà été employé comme unité par d'anciens théoriciens grecs. Huygens et plus tard Fokker l'ont repris pour leur échelle à 31 unités. Ça équivaut au 5e de ton (chap. XII).
- Le comma holderien, 53e division de l'octave (chap. XI), appelé aussi Türksent, compris entre les commas ditonique et syntonique. Les théoriciens turcs apprécient le Système de Holder pour leur musique arabo-oriantale (chap. XVII).
- L'unité qu'a adoptée Woolhouse W., pour construire son échelle de 730 degrés où la quinte 3/2 et la tierce 5/4 ont des valeurs précises, 427 et 235 respectivement.
- Le savart ou eptaméride (ou heptaméride), 301e partie de l'octave, et septième partie de la méride. Défini et défendu par J. Savart, il est mentionné surtout dans la littérature française : 301 n'est autre que $1000 \times \log 2$. Sauveur l'a adopté pour construire une échelle de 43 unités (chap XII) car 301 est un multiple de 43 ($301 = 7 \times 43$).
- La méride est la 43e partie de l'octave, c'est la première mesure logarithmique de l'Histoire de la musique. 7 unités représentent une moyenne entre 9/8 et 10/9, respectivement ton majeur et ton mineur.

V - LE CYCLE DES QUINTES

1. UNE GAMME DE 7 NOTES, POURQUOI ?

L'échelle musicale, c'est la succession de 7 notes (ou degrés), du grave vers l'aigu, dont la disposition est bien établie. Elle se termine par une 8e qui porte le même nom que la 1re, et qui peut commencer une nouvelle série de disposition identique. Elle résonne[1] parfaitement avec la 1re : c'est son octave, sa fréquence est double de la 1re.

Mais tout d'abord, pourquoi 7 notes ? et pas 5 ou 13 ou 31… ?

Le chiffre 7 n'est pas dû au hasard, il a été imposé par des critères physiques et acoustiques (Cycle des Quintes, § 3), et soutenu par la Tradition pendant environ deux millénaires. Son adoption n'a été généralisée que vers la fin de l'Antiquité grecque, auparavant les grecs utilisaient une échelle tétracorde (chap. XVIII § 3).

Nous verrons plus loin (§ 5-6 et chap. XII) que ce chiffre 7 n'est pas fatidique, il existe des gammes à 5, 7, 12, 19, 24, 31 et 43 degrés, pour ne citer que les plus utilisées. La gamme slendro dans certaines îles du sud-est asiatique est composée de 5 tons égaux, et les siamois emploient 7 tons par octave. Les autres nombres (19, 31, 43) ont été introduits pour des raisons acoustiques et harmoniques.

2. CONSTRUCTION DE L'ÉCHELLE MUSICALE

Essayons de construire une échelle musicale, c'est-à-dire un ensemble de sons (ou notes) que peut utiliser un musicien pour composer ou interpréter une mélodie. *A priori*, il ne peut pas utiliser n'importe quel ensemble de sons entre la tonique et l'octave.

[1] terme emprunté aux physiciens, de même racine que "résonance", les théoriciens de la musique eux parlent de "consonance".

Prenons une corde de longueur 60 cm (nombre divisible à la fois par 2 et par 3) et tendons-la entre 2 points fixes et imaginons qu'on a entre les mains un instrument à cordes sans frettes [1]. En la grattant, elle vibre et crée un son. La fréquence f_0 de ce son dépend bien-sûr (en plus de la longueur) de la nature et de la substance de la corde, de sa tension, et même du milieu qui propage le son (ici l'air de l'atmosphère). Prenons cette fréquence comme référence, 100 Hz par exemple et désignons-la par Do (Position à vide) ou plus précisément Do1.

L'octave, qui a une fréquence double (200 Hz) doit impérativement être de la partie et sera située à 30 cm (voir schéma), elle délimite l'échelle (ou la gamme) et elle constitue la première consonance. L'octave suivante sera à 45 cm du sillet et ce sera 15 cm de longueur vibrante.

Une deuxième note, qui présente aussi une très bonne consonance avec la tonique, est indispensable dans toute tonalité (voir § 7). Elle figure dans tous les systèmes musicaux de tous les peuples de la planète. Il s'agit de la quinte juste, Sol; un simple auditeur peut la repérer facilement à l'oreille.

Sa longueur vibrante (chap. II) est de 40 cm = 2/3 de 60 cm; l'étendue de l'intervalle est alors 3/2 (se rappeler de la formule $f_1 / f_2 = l_2 / l_1$) et la fréquence est $3/2 \times f_0 = 150$ Hz.

On verra plus loin que lorsque d'autres notes seront définies, celle-ci sera la 5e dans l'ordre des fréquences croissantes à partir de la tonique, d'où son nom la quinte.

3. CYCLE DES QUINTES

Les instruments de musique, et les voix humaines, n'ont pas tous la même hauteur, la même tessiture : certains sont graves, d'autres sont aigus. Alors, cette note Sol qui a dorénavant sa place sur la corde et dans la gamme peut être la tonique d'une autre tonalité et pour les mêmes raisons qu'en § 2, sa quinte juste doit figurer sur la liste des fréquences de l'échelle musicale et sera désignée par Ré.

$$f(\text{Sol}) = 150 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad f(\text{Ré}) = 3/2 \times 150 = 3/2 \times 3/2 \times 100 = 9/4 \times 100 \text{ Hz}$$

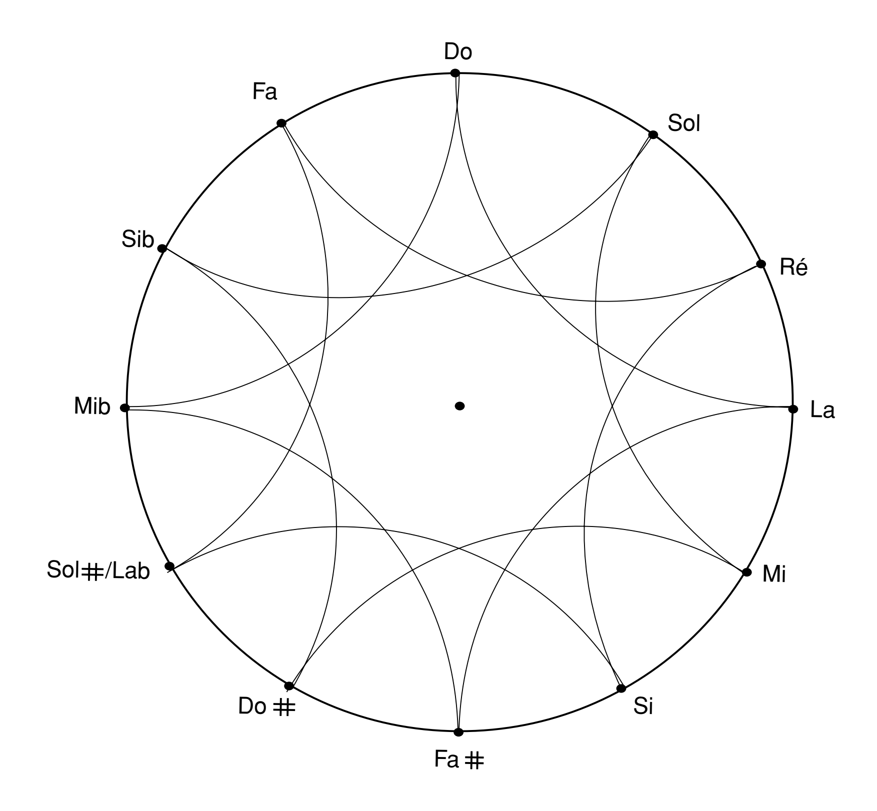
Cette nouvelle fréquence se situe au-delà de la 1re octave 100-200 Hz. Pour la ramener à l'intérieur, il suffit de diviser une seule fois par 2 et on obtient 9/8×100 Hz, c'est la note Ré1, de distance (ou rapport) 9/8=1,125 et de fréquence 112,5 Hz (en supposant que celle de Do1 est 100 Hz).

[1] C'est le "canon" ou "monocorde" d'Euclide [2].

Et ainsi de suite… On détermine alors la fréquence des notes suivantes (leurs noms ne sont pas importants puisque parfois des pays voisins utilisent des nomenclatures différentes) : Do, Sol, Ré, La, Mi, etc.

On a construit cette échelle par quintes ascendantes, on pourrait le faire par quintes descendantes, ou bien alternées, le résultat est le même. Dans tous les cas, partant d'une note désignée par la lettre Do, et dont la fréquence est prise comme référence (=100 Hz), nous avons défini d'autres sons qu'on a réduits à l'intérieur d'une même octave, des sons dont la présence est très souhaitable.

Voilà comment, au départ, on a construit l'échelle musicale, heptatonique (puisqu'elle est composée de 7 degrés).



Le Cycle des Quintes

Remarque : Souvent on préfère commencer le cycle à partir de Fa (voir figure), uniquement pour des raisons de présentation qui n'ont rien à voir avec l'Acoustique, ce qui donne :

Fa, Do, Sol, Ré, La, Mi, Si

On a alors les 7 touches blanches du clavier, un départ de Do aboutirait sur une touche noire (Fa#).

Le "Cycle des Quintes" est un concept attribué, en Occident, à Pythagore, bien qu'il soit originaire de Mésopotamie depuis des millénaires avant l'ère chrétienne [1]. Il forme l'ossature de tous les systèmes musicaux jusqu'à nos jours. Enfin, signalons que plusieurs peuples dispersés à travers le monde utilisent l'échelle pentatonique composée des 5 notes fournies par les 4 premières Quintes (§ 6).

4. L'ÉCHELLE DIATONIQUE

À partir d'une note désignée par Do dont la fréquence f_0 est prise comme référence (c'était 100 Hz § 2 et § 3), on détermine la note Sol de fréquence 3/2 ou 1,5 fois f_0. $f(Sol) = 3/2 \times f_0$ (150 Hz).

La quinte juste ascendante de Sol est Ré, sa fréquence est 3/2 ou 1,5 fois celle de Sol :

$$f(Ré) = 3/2\ f(Sol) = 3/2\ (3/2 \times f_0) = 3/2 \times 3/2 \times f_0 \quad (225\ Hz).$$

Comme ça dépasse l'octave (200 Hz), on est amené à la diviser par deux, ce qui donne $f(Ré) = 9/8\ f_0$ (112,5 Hz).

On continue la même procédure, la quinte suivante est Ré-La :

$$f(La) = 3/2\ f(Ré) = 3/2 \times 9/8 \times f_0 = 27/16 \times f_0$$

La-Mi : $f(Mi) = 3/2\ (27/16\ f_0) = 81/32\ f_0 > 2\ f_0$, après réduction : $f(Mi) = 81/64\ f_0$.

Mi-Si : $f(Si) = 3/2\ (81/64\ f_0) = 243/128\ f_0$.

[1] Les chinois aussi ont développé le même concept longtemps avant les grecs.

Do	⇒	Sol	⇒	Ré	⇒	La	⇒	Mi	⇒	Si
f_0		$3/2\ f_0$		$9/8\ f_0$		$27/16\ f_0$		$81/64\ f_0$		$243/128\ f_0$

On peut déterminer Fa en descendant d'une quinte à partir de Do, le résultat est : $4/3\ f_0$.

L'échelle absolue

L'échelle qu'on vient de définir est relative, c'est-à-dire qu'on peut monter ou baisser l'ensemble des notes, comme on fait lorsqu'on accorde un instrument à cordes.

Si on veut accorder cet instrument d'une manière absolue, la note "La" doit avoir la fréquence 440 Hz (diapason), et par des multiplications et des divisions par 3/2 on détermine la fréquence en Hz de toutes les notes de la gamme diatonique :

Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	
1	9/8 =1,125	81/64 =1,2656	4/3 = 1,3333	3/2 = 1,5000	27/16 = 1,6875	243/128=1,8984	2	
260,74	293,33	330	347,65	391,11	440	495	521,48	Hz

Le rapport des fréquences et la distance en cents entre 2 notes successives sont :

Do-Ré	Ré-Mi	Mi-Fa	Fa-Sol	Sol-La	La-Si	Si-Do
9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
203,9	203,9	90,2	203,9	203,9	203,9	90,2

Remarquons l'apparition fréquente du nombre 9/8 (=1,125), il définit le "ton", et sa hauteur en cents est :

$$[\log(1{,}125)/\log 2] \times 1200 \quad = \quad 203{,}9 \text{ cents}$$

Rappelons la remarque de chap. IV § 4 : le terme "ton" peut avoir un sens plus général et désigner une Unité ou une division quelconque de l'octave.

Les 2 autres intervalles (Mi-Fa et Si-Do), désignés par le terme "limma", sont assimilés par les théoriciens (à tort ou à raison !) à des demi-tons. Leur hauteur est de 256/243=1,0535 (ou 90,2 cents), elle est à l'évidence inférieure à la moitié de celle d'un ton. En confondant limma et demi-ton (comme sur un clavier de piano), la disposition des notes est alors :

T T ½T T T T ½T

Enfin, cette division peut être extrapolée à 12 demi-tons (et même à 24 quarts de ton, voir le chapitre sur la Micro-tonalité).

Remarque

Pour le même diapason, les valeurs du Tableau du chapitre II sont très légèrement différentes (Do=261,6 Hz et le Ton=1,1225). L'explication sera donnée au chapitre XI, nous vous conseillons de ne pas brûler les étapes si vous voulez comprendre l'Evolution de l'Acoustique Musicale au cours de l'Histoire.

5. LA GAMME SINO-INDIENNE

L'Echelle Musicale diatonique, construite sans doute à partir du même principe qu'au Moyen-Orient, a été découverte aussi en Chine, des millénaires avant Jésus-Christ. Sans le dire expressément, Alain Daniélou [15, p. 69] laisse penser que de là elle a transité ensuite en Inde par les montagnes de l'Himalaya. Je n'ai pas l'intention de polémiquer, mais je dois signaler au lecteur que la Vallée de l'Indus, berceau de la civilisation indienne, est plus proche de la Mésopotamie que des anciens foyers de la civilisation chinoise, et il n'y a pas de montagne à traverser. D'ailleurs, "au 3e millénaire, au nord-ouest de l'Inde, existait une vieille civilisation plus ou moins en relation avec la Mésopotamie et l'Egypte", d'après Ulrich Michels [16, p166].

La gamme chinoise était composée au départ des 7 degrés : Do - Ré - Mi - X - Sol - La - Si, X étant plus proche de Fa# que de Fa, pourtant interdit au Moyen Âge en Europe (le Triton, ou Diabolus in Musica). Des considérations métaphysiques ont fait que 2 des 7 notes étaient considérées comme appartenant au "Monde Invisible" et ont fini par disparaître. La gamme chinoise s'est ainsi réduite aux 5 notes, formées par le cycle des 4 premières quintes : Do - Sol - Ré - La - Mi, on la retrouve d'ailleurs chez divers peuples du sud-est asiatique (et un peu partout dans le monde) :

Do (Koung)	Ré (Shang)	Mi (Kyo)	Sol (Tchi)	La (Yu)
81/81 =1	81/72=9/8=1,125	81/64=1,2656	81/54=3/2=1,5	81/48=27/16=1,6875

La gamme indienne a conservé la structure heptatonique : 7 notes principales, les svara-s (plus 2 notes secondaires), qui portent les noms suivants : Sa, Ri, Ga, Ma, Pa, Da, Ni.
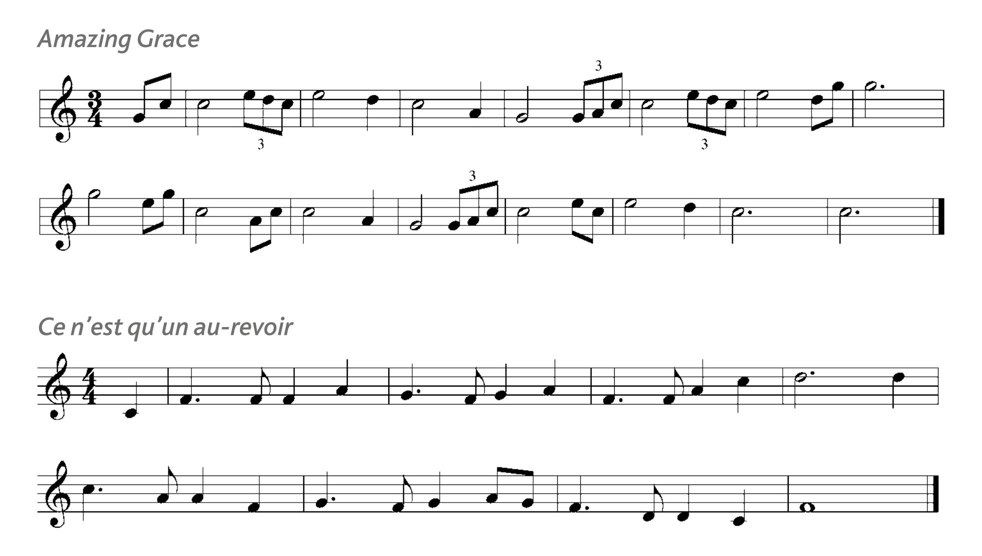
L'acheminement qui a abouti à la gamme shrouti de 22 degrés par octave ne fait pas l'unanimité (***http://etiop.free.fr/shruti.htm***). Dans son ***Traité de Musicologie Comparée*** [15], Alain Daniélou en donne une explication assez longue, nous lui préférons celle de Bernard Bel (chap. IX § 3).

6. L'ECHELLE PENTATONIQUE

Elle correspond à la "gamme" Do-Ré-Mi-Sol-La-Do, et est (ou était) répandue un peu partout dans le monde : Chine, Japon, chez des peuples du Sud-Est asiatique, en Afrique noire, chez les bèrbères (amazighs) d'Afrique du Nord, en Amérique, en Groenland et en Ecosse, dans le chant grégorien et dans certains hymnes religieux encore en usage de nos jours.

On reconnaît facilement le cycle des 4 premières quintes. Une explication possible de l'origine de cette échelle est que les anciens peuples qui la pratiquaient ne pouvaient (ou ne voulaient ou n'appréciaient) pas employer des demi-tons. Ils n'ont pas pensé à diviser les intervalles Mi-Sol et La-Do en 2 parties égales de ¾ de ton chacune comme en Orient arabo-musulman, et n'ont pas eu non plus des problèmes de transposition et de modulation qui imposent un minimum de régularité dans l'échelle comme c'était le cas en Europe depuis la Renaissance.

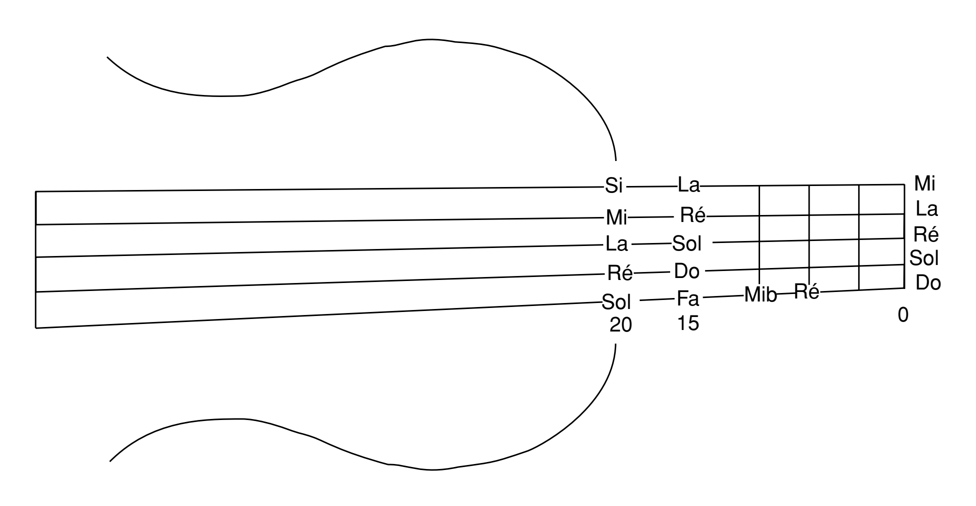
Deux exemples typiques sont la chanson du folklore écossais *Ce n'est qu'un au revoir* et le thème de l'hymne religieux *Amazing grace* chanté entre autres par Ray Charles, Louis Armstrong, Elvis Presly et Céline Dion.



7. LES TROIS PILIERS D'UNE ÉCHELLE MUSICALE

Au stade où en est la lecture (ou l'étude) de cet ouvrage je vais peut-être vous étonner, mais si vous continuez jusqu'au dernier chapitre vous avez toutes les chances de rallier mon point de vue. Après l'examen d'un grand nombre d'échelles musicales (européennes, ethniques, orientales, anciennes, contemporaines, d'avant-garde, etc.) qui ont eu un peu de succès et de longévité, et s'appuyant sur des arguments acoustiques libérés de toute influence historique ou culturelle, avec beaucoup de recul acquis après un quart de siècle de recherches acoustiques et musicologiques, je suis parvenu au "postulat" ou "axiome" suivant :

Pour construire une échelle musicale, c'est comme pour définir un plan en géométrie, il faut 3 points fixes : la tonique, l'octave et la dominante 3/2 (702 cents). Après cela, vous vous fixez un nombre quelconque de degrés, à condition qu'il y ait un minimum de consonances (tierce, quinte, et éventuellement septième) et que les intervalles ainsi formés soient les plus réguliers possibles. Vous verrez que peu de nombres peuvent répondre à ces critères : 5, 7, 12, 19, 24, 31, 43. Ils ont déjà tous servi au cours de l'Histoire, CQFD.



"Division du Monocorde"
Schéma d'un instrument imaginaire
montrant la position des notes sur une corde.

VI - LE SYSTÈME UNIVERSEL

1. PYTHAGORE



Pythagore, à qui les Occidentaux attribuent la conception du Système Universel qui porte son nom. En réalité, il l'a apporté de Mésopotamie.

Le mathématicien grec Pythagore a vécu au VIe siècle avant J.C. Il a voyagé beaucoup et a passé plusieurs années en Égypte et en Mésopotamie. Ses différents séjours ont duré une vingtaine d'années à une époque où la civilisation grecque était à ses premiers débuts (je ne connais pas de savant grec avant le VIe siècle).

En plus du théorème mathématique qui porte son nom, Pythagore est aussi accrédité du système musical qui porte son nom également, bien qu'il l'ait apporté de Mésopotamie [1].

Sous quelle forme était-il présenté ? Les grecs avaient un système de numération compliqué. Leurs nombres entiers (sans fraction et sans virgule) avaient un aspect complexe et encombrant, comment se présentaient alors leurs fractions ? Pythagore a sans doute contribué à l'étude de ce système musical sans en être l'inventeur. Comme il n'a rien laissé d'écrit [2], il est fort possible que ce soient ses disciples qui l'aient développé.

---

[1] "Les grecs avaient reçu la plupart des éléments de leur Système Musical de l'Égypte et du Proche-Orient [Mésopotamie], ce dont ils ne se cachaient nullement", Alain Daniélou, dans ***Traité de Musicologie Comparée***, [15, p. 125].

[2] C'est l'idée admise en Occident, quoique la vérité est quelque peu différente (chap. XVII, § 2).

De toute façon, il est préférable de le désigner par "**Système Universel**", vu qu'il a été conçu séparément en deux endroits (Chine et Mésopotamie) très éloignés l'un l'autre et sans aucun contact, et qu'il a été adopté par tous les peuples du Moyen-Orient qui l'ont pris directement à la source, sans passer par les grecs.

En résumé, la succession de 7 quintes fournit les 7 notes de la gamme. Les degrés sont séparés par des intervalles de rapport 1,125 (tons, 204 cents) pour la plupart, et 1,0535 (limmas, 90 cents) pour Mi-Fa et Si-Do, ces deux derniers étant qualifiés abusivement de demi-tons (voir Remarque).

Cette gamme diatonique (sans altérations) a été la seule utilisée dans l'Antiquité romaine et le haut Moyen Âge. On pouvait la commencer par n'importe quelle note, la position des demi-tons changeait, ce qui donnait des tonalités différentes qu'on appelle communément modes anciens (chap. XVIII). Ensuite, on a introduit progressivement les altérations.

Remarque : le Comma

La différence entre un ton et 2 limmas est de 203,9 – 180,4 = 23,5 cents, et s'appelle "comma".

Il existe plusieurs variantes de commas, dont le seul point en commun est d'avoir une hauteur d'environ 23 cents, ce qui correspond en gros à un neuvième de ton.

2. LA GAMME CHROMATIQUE

On reprend le cycle des quintes à partir de Fa pour éviter les altérations. En continuant au-delà de Si sur un nouveau cycle de quintes, on tombe sur un ensemble de 7 notes un demi-ton environ au-dessus des notes du premier cycle, et qu'on va désigner provisoirement par A, B, C, D, E, X et Y :

Fa Do Sol Ré La Mi Si
A B C D E X Y

Explication :

f(A) = 3/2 × f(Si) = 3/2 × 243/128 × f(Fa) = 2,84766 f_0 ,

avec f_0 fréquence de la note de référence Do. On divise une fois par 2 et on obtient 1,42383 f_0 .

Le rapport entre ce nouveau son et Fa est : 1,42383 f_0 / 1,33333 f_0 = 1,06787.

C'est le même décalage d'ensemble entre le 1er groupe (Fa, Do, Sol ...) et le deuxième (A, B, C...). Pour des raisons de simplicité, on a préféré garder la même nomenclature en ajoutant à chaque fois le signe dièse (#) qui indique d'élever le son d'une valeur de 1,06787 (un peu plus de la moitié d'un ton qui est de $\sqrt{9/8} \approx 1,06066$)

Fa Do Sol Ré La Mi Si
Fa# Do# Sol# Ré# La# Mi# Si#

Conclusion : on constate que les 2 dernières notes X=Mi# et Y=Si# sont très légèrement plus hautes que Fa et Do alors qu'elles devraient être leurs enharmoniques, pour retrouver les mêmes notes que l'ensemble de départ. On dit que le Cycle des Quintes ne se referme pas, la raison est que 2 et 3 sont des nombres premiers entre eux.

On va calculer cette très légère différence entre Fa de départ et Mi# d'arrivée :
Fa : 1,33333 f_0
Mi : 81/64 f_0 = 1,26562 f_0
X : 1,26562 f_0 × 1,06787 = 1,35152 f_0

X / Fa ou Mi# / Fa = 1,01364

X=Mi# et Fa (ainsi que Y=Si# et Do) sont séparées par 1,01364, valeur qu'on peut calculer d'ailleurs d'une manière plus "intelligente". De Fa à X=Mi# il y a 12 quintes justes de rapport 3/2, l'étendue de cet intervalle est de $(3/2)^{12}$ alors qu'on a parcouru seulement 7 octaves d'étendue globale 2^7 (c'est bien visible sur un clavier de piano). La différence entre Mi# ($(3/2)^{12}$) et Fa (2^7) est donc de :

$$(3/2)^{12} / 2^7 = 129{,}746 / 128 = 1{,}01364$$

$$[\log(129{,}746/128)/\log 2] \times 1200 = 23{,}46 \approx 23{,}5 \text{ cents}$$

d'après la définition chap. IV § 4, soit environ le neuvième d'un ton, c'est ce qu'on appelle un comma ditonique (ou pythagoricien).

Pour retrouver les bémols, il faut faire la démarche inverse en descendant par quintes successives à partir de Si :

Si, Mi, La, Ré, Sol, Do, Fa, Sib, Mib, Lab, Réb, Solb, etc.

La fréquence de Solb est obtenue en divisant celle de Do (f_0) par $(3/2)^6$, et en multipliant par 2^4 : 1,40466. Comparons-la avec celle de Fa#

Fa : 1,33333 (4/3) et Fa # : 1,33333 × 1,06787 = 1,42383

Fa# est donc plus élevée que Solb de 1,42383/1,40466 ≈ 1,01364. La première constatation est que ces 2 notes, mêmes décalées d'un comma, sont représentées sur le clavier par une touche noire unique. Vous verrons plus loin (chap. XI) que les touches du piano sont basées sur un calcul différent (voir Remarque chap. V, § 4).

Si le demi-ton diatonique (limma) vaut 90,2 cents, le demi-ton chromatique vaut 203,9 – 90,2 = 113,7 cents et s'appelle "apotome".

Do		Ré		Mi	Fa	
1	Do#=1,0679 Réb=1,0535	9/8=1,125	Ré#=1,2013 Mib=1,1852	81/64= 1,2656	4/3= 1,3333	Fa#=1,4238 Solb=1,4047

Sol		La		Si	Do
3/2=1,500	Sol#=1,6018 Lab=1,5802	27/16= 1,6875	La#=1,8020 Sib=1,7778	243/128= 1,8984	2

Échelle chromatique de Pythagore.
Les notes altérées (par exemple Do# et Réb) ne sont pas enharmoniques
(Do# > Réb)

3. DES SYSTÈMES DÉRIVÉS

Comme on verra plus loin en détail (chap. XII), les occidentaux ont conçu des systèmes à 19, 31, 24, 43 et même 53 unités (tons). On y trouve toujours une note qu'on peut assimiler à la quinte (3/2=1,5) bien qu'elle ne se trouve pas au 5e rang, mais on pourra toujours l'appeler dominante.

La gamme chinoise, même si à ses débuts elle était de type pythagoricien, a suivi un modèle pentatonique. Elle est mieux exprimée en unités de demi-tons (chap. V, § 5):

2 2 3 2 3

La gamme arabo-orientale, aussi de type profondément pythagoricien, a subi les influences de la culture perse et a pris, à partir du IXe siècle, un tournant plus original (chap. XVII) tout en gardant une structure heptatonique. Pour simplifier, on va la présenter en unités de quarts de tons :

4 3 3 4 4 3 3

La musique indienne, d'origine heptatonique, a été développée dans le sens d'une division de l'octave en 22 shroutis (environ ¼ de ton) dont on peut prendre 5, 6, 7 ou 8 pour former un mode ou raga (chap. XVIII).

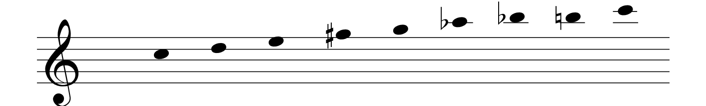
Le fait que ces 3 systèmes aient réussi à traverser les âges n'est pas un hasard. Certes ils n'ont pas rencontré de difficultés liées à la Polyphonie comme dans l'Europe de la Renaissance, mais en plus ils ont un atout de taille : ils possèdent tous une dominante d'un rapport de 3/2 (702 cents).

4. D'AUTRES SYSTÈMES

Une échelle en 6 parties égales (utilisée par Debussy) n'existe nulle part, et pour cause, ça donnerait des notes équivalentes (ou très proches) de Fa# et Sol # mais aucune comparable à la dominante Sol.

Des théoriciens pseudo-scientifiques ont élaboré des systèmes se basant sur la résonance du Corps Sonore (chap III, § 2). Citons le cas de Hindemith [17] qui a préconisé une gamme composée des harmoniques de 8 à 16 :

Degré 1	Degré 2	Degré 3	Degré 4	Degré 5	Degré 6	Degré 7	Degré 8	Degré 9
8/8	9/8	10/8	11/8	12/8	13/8	14/8	15/8	16/8



La gamme obtenue compte 8 notes au lieu de 7, et ressemble vaguement à la gamme diatonique du Système Universel (chap. V). Les intervalles entre notes successives sont de la forme 8/9, 10/9, 11/10, etc. , c'est-à-dire (n+1)/n, et vont en décroissant, ce qui ne sera jamais compatible avec la pratique musicale.

Quelques autres systèmes qui ne respectent pas la structure décrite dans ce chapitre existent en Afrique et en Asie (on parle alors d'ethno-musique). Chez les javanais et les siamois l'octave est divisée, respectivement, en 5 et 7 unités (tons), et dispose toujours d'un degré équivalent à la quinte (rapport 3/2). Pour déterminer leur ton, il suffit de prendre la racine 5e ou 7e de 2 :

$$\sqrt[5]{2} \approx 1,1487$$
$$\sqrt[7]{2} \approx 1,1041$$

Les musiques extra-européennes sont reconnaissables à première vue par leurs instruments, et par leur aspect visuel. Mais ce qui les différencie vraiment, ce sont leurs gammes (tonalités, si vous préférez). Prenez un exemple qui vous est familier : le rai (considéré à tort comme musique arabe), peut être exécuté à l'aide d'une lutherie locale, orientale, ou même européenne; en arabe, en français, en kabyle ou même en dialecte beur de la Banlieue. Son support reste la tonalité, mélange de kabyle, arabe et andalous (chap. XVII, § 9).

Ces musiques extra-européennes emploient presque tout le temps des tonalités heptatoniques (ou pentatoniques) basées sur le Système Universel, obtenues à l'aide d'altérations qui ne respectent pas forcément la règle du tétracorde, et où peuvent cohabiter des dièses et des bémols. "On en trouve pratiquement autant que de Sociétés, et leur degré de raffinement est parfois extra-ordinaire" [13, p. 139].

La Micro-tonalité, où les gammes contiennent plus de 12 degrés, fera l'objet du chapitre XIV.

5. LES NOMBRES PREMIERS

L'idée de construire un tempérament en prenant uniquement les octaves successives d'une note de départ aurait conduit à une échelle très banale où les rapports d'intervalle seraient 2, 4, 8, etc., donc des puissances du nombre 2.

On constate que lors de la construction de la gamme de Pythagore, on a utilisé exclusivement les nombres (premiers) 2 et 3 : les rapports de tous les intervalles sont des fractions composées uniquement des puissances de 2 et de 3. Des théoriciens ont vu en celà un système dont la seule raison d'être est la présence des nombres premiers jusqu'à 3.

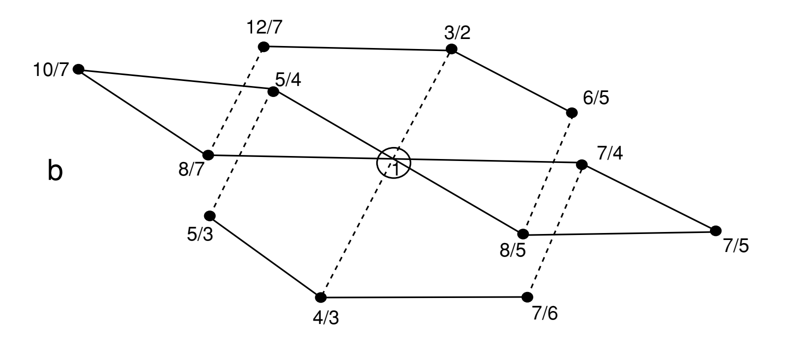
Avec la même procédure, on peut aller jusqu'à 5 (conjointement avec 2 et 3) et ça aboutit à ce que certains appellent le Système de limite 5 ("5-limit system" dans la littérature anglo-saxonne) similaire à celui de Zarlino (chap. IX). On a aussi parlé d'un Système de limite 7 (voir graphique). Le nombre 11 constitue le noyau de la théorie très complexe de H. Partch (chap. XIV), le 13 a été évoqué aussi mais à notre connaissance il n'a pas été exploité. L'importance que ces théoriciens ont voulu donner aux nombres premiers n'est pas, à notre avis, justifiée. Comme on le verra plus loin, à part le "5" qui n'a pas résisté longtemps et le "7" qui a servi à introduire la consonance 7/4 (chap. XII), tous les autres étaient morts-nés.

Au XVIIIe siècle, le mathématicien Euler a conçu des "genres" musicaux, ou modes, générés par des nombres (générateurs) de la forme $3^n \times 5^p \times 7^q$, pour déterminer les différents intervalles de la gamme. Bien qu'Euler soit un grand scientifique, il a négligé l'aspect musical et ses "genres" sont le résultat d'un simple artifice arithmétique (Annexe VII).

6. CONCLUSION

Avec des origines qui remontent à environ 5 millénaires, c'est sans doute le monument le plus ancien de toute l'Histoire de l'Humanité. Si le Système Universel est resté la base de toutes les échelles jusqu'à nos jours, c'est qu'il a un atout majeur qui est sa régularité. Tous les degrés ont la même valeur de 203,9 cents à part Mi-Fa et Si-Do dont la valeur de 90,2 cents est approximativement la moitié. Cette régularité a permis de l'exploiter à fond avant même l'arrivée progressive des premières altérations (en gros entre l'an 1000 et 1300) et d'élaborer plusieurs tonalités basées uniquement sur la gamme diatonique (modes anciens). Un petit inconvénient (chap. X) sera à l'origine de la conception d'autres systèmes pendant les périodes Renaissance et Baroque, mais le Système Duodécimal actuel (chap XI) sur lequel sont construits les instruments à clavier et à frettes n'est rien d'autre qu'un ajustement du Système Universel développé par Pythagore (ou ses disciples).

Enfin, la Micro-tonalité (chap. XII et XIV) réapparue en Europe il y a environ un siècle et très prisée actuellement outre-atlantique est fondée sur des idées développées par d'anciens théoriciens à partir du Système Universel, en rajoutant d'autres sons pour répondre à certains critères acoustiques (chap. VII).



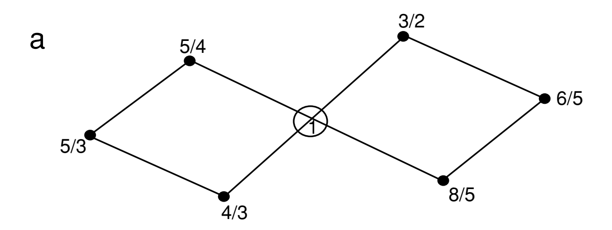


Diagramme montrant la construction des échelles se basant sur les nombres premiers.

À partir de la tonique 1, les différents degrés sont obtenus par les multiplications et divisions par (VI, 5) :

a, 2, 3 et 5
b, 2, 3, 5 et 7

Sur des sites Internet, on trouve des exemples beaucoup plus complexes dont le seul but, à notre avis, est d'impressionner.